ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΜΠΑΤΣΗΣ

Για τα 200 Χρόνια από τη Γέννηση του Karl Marx, Μέρος Ι: Ο κατά Marx Προσδιορισμός της Παραγώγου Συνάρτησης και το Όριο της Συνάρτησης του Ποσοστού Κέρδους

ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΜΑΡΙΟΛΗΣ

Σειρά Δημοσιεύσεων Πολυτεχνικού Τμήματος
Αρ. 4

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Ο κατά Marx Προσδιορισμός της Παραγώγου Συνάρτησης και το Όριο της Συνάρτησης του Ποσοστού Κέρδους*

Θεόδωρος Μαριόλης
Καθηγητής Πολιτικής Οικονομίας, Τμήμα Δημόσιας Διοίκησης, Πάντειο Πανεπιστήμιο, *Study Group on Sraffian Economics*, και Ινστιτούτο Κοινωνικών Ερευνών Δημήτρης Μπάτσης

1. Εισαγωγή

Το Μάιο του 2018, ο Γενικός Γραμματέας του Κομμουνιστικού Κόμματος της Λαϊκής Δημοκρατίας της Κίνας, και Πρόεδρος της χώρας, Xi Jinping, σε κεντρική ομιλία του για τα 200 χρόνια από τη γέννηση του Marx, η οποία έλαβε χώρα στη «Μεγάλη Αίθουσα του Λαού» στο Πεκίνο, επεσήμανε ότι:

> Στα τελευταία χρόνια της ζωής του, ο Marx μελέτησε νέα επιστημονικά πεδία και έγραψε μεγάλο όγκο σημειώσεων γύρω από την Ιστορία, την Ανθρωπολογία, και τα Μαθηματικά. […] Δύο αιώνες μετά, παρά τις τεράστιες και βαθειές αλλαγές που έχουν γίνει στην ανθρώπινη κοινωνία, το όνομα του Karl Marx εξακολουθεί να είναι σεβαστό σε όλο τον κόσμο, και η θεωρία του εξακολουθεί να λάμπει με το λαμπρό φως της αλήθειας. Ο Marx είναι ο μεγαλύτερος στοχαστής της σύγχρονης εποχής.

Πριν από 136 χρόνια, ο Friedrich Engels, στον επικήδειο που συνέταξε για τον Karl Marx, τόνιζε:

> Όπως ο Δαρβίνος ανακάλυψε το νόμο εξέλιξης της οργανικής φύσης, έτσι ο Marx ανακάλυψε το νόμο εξέλιξης της ανθρώπινης ιστορίας. […] Ο Marx ανακάλυψε επίσης τον ειδικό νόμο κίνησης του σύγχρονου κεφαλαιοκρατικού τρόπου παραγωγής. […] Ο Marx, όμως, έκανε ανεξάρτητες ανακαλύψεις σε κάθε τομέα που ερεύνησε, ακόμα και στα Μαθηματικά.

Ποια ήταν, άραγε, η κύρια «ανεξάρτητη ανακάλυψη του Marx στα Μαθηματικά»; Αυτό έγινε πλήρως γνωστό μόνο όταν δημοσιεύτηκαν, το έτος 1968, τα επονομαζόμενα *Μαθηματικά Χειρόγραφα* του Marx, από το Ινστιτούτο Μαρξισμού-Λενινισμού της Κεντρικής Επιτροπής του Κομμουνιστικού Κόμματος της Σοβιετικής Ένωσης (στη ρωσική και γερμανική γλώσσα). Τα *Μαθηματικά Χειρόγραφα* εκτείνονται σε πάνω από 1000 φύλλα, γράφτηκαν από το 1858 έως το 1883, και η ύπαρξή τους έγινε γνωστή, κατά πρώτον, από

* Κείμενο στο οποίο βασίστηκε η εισήγησή μου στο Επιστημονικό Συμπόσιο: «200 χρόνια από τη Γέννηση του Karl Marx: Οικονομία, Κοινωνία, Κράτος», 12 & 13 Δεκεμβρίου 2018, Τμήμα Δημόσιας Διοίκησης, Πάντειο Πανεπιστήμιο. Για τη θεώρηση του χειρογράφου και ενδιαφέρουσες επισημάνσεις και συζητήσεις είμαι υπόχρεος στην Δέσποινα Κεσπέρη και στον Γιώργο Σώκλη, χωρίς, βεβαίως, αυτό να σημαίνει ότι συμφωνούν, κατανάγκην, με ό,τι γράφω.

σχετική αναφορά του Engels στον *Πρόλογο* της 2ης έκδοσης (23 Σεπτεμβρίου 1885) του έργου του με τίτλο: *Αντι-Ντύρινγκ* (βλέπε Ένγκελς, [1878] 2006, σελ. 16). Πάντως, αρκετά αντιπροσωπευτικό, καίτοι μικρό, τμήμα του υλικού είχε δημοσιευτεί το 1933, για τα 50 χρόνια από το θάνατο του Marx, στο σοβιετικό περιοδικό *Pod Znamenem Marksizma* (*Υπό τη Σημαία του Μαρξισμού*), και σε μετάφραση στη ρωσική γλώσσα.

Επικεφαλής της σοβιετικής έκδοσης του 1968 ήταν η Καθηγήτρια Μαθηματικών του Κρατικού Πανεπιστημίου Lomonosov της Μόσχας Sofya Aleksandrovna Yanovskaya, η οποία κατά την πολυετή ετοιμασία του υλικού συμβουλευόταν, για τα αμιγώς επιστημονικά ζητήματα, τους Σοβιετικούς Ακαδημαϊκούς Μαθηματικούς Andrey Nikolaevich Kolmogorov και Ivan Georgievich Petrovsky (μεταξύ άλλων). Η εν λόγω έκδοση περιλάμβανε, επίσης, υπομνήματα, σημειώσεις, και ιδιαιτέρως χρήσιμες εργασίες της Yanovskaya και του Σοβιετικού Μαθηματικού Ernst Kol’man, ο οποίος είχε αρχίσει να ασχολείται με το υλικό των *Μαθηματικών Χειρογράφων* από τη δεκαετία του 1930.[1]

Ο Marx μελέτησε επί μακρόν την επιστήμη των Μαθηματικών, και ιδίως τους κλάδους του Απειροστικού Λογισμού και των Αποκλινουσών Σειρών, διερεύνησε κομβικά οικονομολογικά φαινόμενα – και – σε όρους της Μαθηματικής επιστήμης, και, τέλος, στα τελευταία χρόνια της ζωής του, δηλαδή στα μέσα του 1881, πρότεινε έναν τρόπο προσδιορισμού της Παραγώγου Συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής.

Ως αντιπροσωπευτικό δείγμα των σχετικών οικονομολογικών ερευνών του, δύναται να αναφερθεί ότι, όπως μας πληροφορεί ο Engels, με μία σημείωσή του στο τέλος του 3ου Κεφαλαίου (με τίτλο: «Η Σχέση του Ποσοστού Κέρδους ως προς το Ποσοστό Υπεραξίας») του 3ου τόμου του *Κεφαλαίου*, στο χειρόγραφο του Marx:

> [Υ]πάρχουν και άλλοι πολύ λεπτομερειακοί υπολογισμοί σχετικά με την απόκλιση ανάμεσα στο ποσοστό υπεραξίας και στο ποσοστό κέρδους, η οποία εμφανίζει διάφορες πολύ ενδιαφέρουσες ιδιομορφίες

[1] Μετά τη σοβιετική έκδοση του 1968, ακολούθησαν εκείνες στην Ομοσπονδιακή Δημοκρατία της Γερμανίας και στη Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας, το 1974, και στην Ιταλία, το 1975. Η μεταγενέστερη αγγλική έκδοση (ως Marx, 1983), περιλαμβάνει το διαυγές και περιεκτικό άρθρο του Βρετανού Μαθηματικού Cyril Smith, με τίτλο: «Hegel, Marx and the calculus», το οποίο γράφτηκε ειδικά για εκείνη την έκδοση, αλλά όχι το σύνολο μαρξικών χειρογράφων της σοβιετικής έκδοσης του 1968. Η ελληνική έκδοση (ως Μαρξ, 1987) αποτελεί όχι τόσο καλή μετάφραση (και, γενικά, επιμέλεια) της αγγλικής έκδοσης του 1983, αλλά δεν περιλαμβάνει το άρθρο των E. Kol’man και S. Yanovskaya με τίτλο: «Χέγκελ και Μαθηματικά», το οποίο υπάρχει στην αγγλική έκδοση, και είχε κατά πρώτον δημοσιευτεί το 1931, στο περιοδικό *Pod Znamenem Marksizma*. Τέλος, η ινδική έκδοση, ως Marx (1994), περιλαμβάνει, σε αγγλική μετάφραση και επιμέλεια του Pradip Baksi (Ινδού μεταφραστή και εκδότη, ο οποίος δεν συνδέεται με κανένα ακαδημαϊκό, πολιτικό ή εμπορικό οργανισμό, όπως αναφέρει στο Βιογραφικό του), το σύνολο των *Μαθηματικών Χειρογράφων* και μία συλλογή σημαντικών, συναφών εργασιών Σοβιετικών Μαθηματικών.

> και της οποίας η κίνηση αποκαλύπτει πότε αυτά τα δύο ποσοστά απομακρύνονται μεταξύ τους ή, αντιστρόφως, προσεγγίζουν το ένα το άλλο. Αυτή η κίνηση δύναται να απεικονισθεί και μέσω καμπυλών. Παραιτούμαι από την ενσωμάτωση του εν λόγω υλικού στον παρόντα τόμο, γιατί έχει μικρότερη σημασία για τους άμεσους σκοπούς αυτού του έργου, και γιατί εδώ αρκεί, απλώς, να επιστηθεί η προσοχή, σε αυτό το γεγονός, εκείνων οι οποίοι θα θελήσουν να μελετήσουν περαιτέρω το ζήτημα.

Ευρύτερα μιλώντας, τώρα, το δυσεπίλυτο πρόβλημα της ασφαλούς θεμελίωσης του Διαφορικού-Ολοκληρωτικού Λογισμού απασχολούσε σε βάθος τους Marx και Engels, πράγμα το οποίο διαπιστώνεται όχι μόνο από την αλληλογραφία τους αλλά και από διάφορες αναπτύξεις του Engels στα έργα του με τίτλους: *Αντι-Ντύρινγκ* και *Διαλεκτική της Φύσης*. Έτσι, όταν ο Marx έστειλε το χειρόγραφό του με τίτλο: «Για την Έννοια της Παραγώγου Συνάρτησης» στον Engels, ο τελευταίος του απάντησε, στις 18 Αυγούστου 1881, ως ακολούθως:

> Σε συγχαίρω για το έργο σου. Το θέμα είναι ξεκάθαρο σαν το φως της μέρας, τόσο που δεν μπορούμε να καταλάβουμε γιατί οι μαθηματικοί επιμένουν να του προσδίδουν μυστηριώδη χαρακτήρα. […] Το ζήτημα με διακατέχει τόσο πολύ, ώστε όχι μόνο περιστρέφεται όλη μέρα στο κεφάλι μου, αλλά και την περασμένη εβδομάδα είδα στο όνειρό μου ότι έδωσα σε κάποιον τα κουμπιά του πουκαμίσου μου για να τα διαφορίσει, και εκείνος τα πήρε και έφυγε.

Αφήνοντας στην άκρη την ανεξάρτητη και εκπληκτική ινδική μαθηματική παράδοση, η έννοια και ο προσδιορισμός της παραγώγου συνάρτησης εισήχθησαν κατά το δεύτερο ήμισυ του 17ου αιώνα από τους Gottfried Wilhelm Leibniz και Isaac Newton. Όμως, όπως μάθαμε μόλις κατά τις αρχές του 20ου αιώνα, και αφού προηγήθηκε το καινοτόμο έργο των Georg Cantor και Julius Wilhelm Richard Dedekind, η θεμελίωση αυτής της έννοιας προϋποθέτει ως λυμένο το κεφαλαιώδες ζήτημα της *κατασκευής* του «Συνόλου των Πραγματικών Αριθμών».

Η έννοια της παραγώγου συνάρτησης βασάνιζε, λοιπόν, τους ειδικούς επί αιώνες, και, επί παραδείγματι, ο Καθηγητής Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών Σπυρίδων Σαραντόπουλος (1951) παρατηρούσε, αναδρομικά, ότι:

> Τα [από τους Newton και Leibniz] χρησιμοποιηθέντα θεμέλια εμφανίζονται […] αρκετά επισφαλή και ανακριβή. Τούτο οφείλεται εις την έλλειψιν σαφηνείας, έπειτα επίσης εις την πλημμελή αντίληψιν των απειροστών μεγεθών και των απείρως μεγάλων ποσοτήτων και των ορίων, εις την αδιαφορίαν περί την σύγκλισιν ή απόκλισιν των σειρών και τέλος εις τον τρόπον της αντιλήψεως της εννοίας της συναρτήσεως.

Η εν λόγω έννοια όχι μόνο εξακολουθεί (και θα εξακολουθεί!) να βασανίζει σπουδαστές και δασκάλους (οι οποίοι προτιμούν, κατά κανόνα, και υπό την πίεση των εξεταστικών υποχρεώσεών τους, να «κλείνουν τα μάτια και το μυαλό»), αλλά και, όπως αποδείχθηκε, μόλις στη δεκαετία του 1960, από τον Abraham Robinson (1966), δέχεται μία, τουλάχιστον, εναλλακτική θεμελίωση. Θεμελίωση σημαντικά διαφορετική από εκείνη την οποία πρότειναν οι Augustin-Louis Cauchy και Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, κατά τον 19ο αιώνα, και την οποία – κατά κανόνα – διδασκόμαστε έως σήμερα, ως μάλλον μοναδική και απαλλαγμένη ζητημάτων.

Η κατά Robinson θεμελίωση προαπαιτεί μία γενίκευση-επέκταση του συνόλου των πραγματικών αριθμών, γνωστή ως «Μη-Πρότυπη Ανάλυση (*Non-Standard Analysis*)», η οποία παραβιάζει το λεγόμενο Αξίωμα του Αρχιμήδη (ή των Ευδόξου-Αρχιμήδους).[2] Αυτό το «αξίωμα» δηλώνει ότι:

(α). «Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό χ, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $\nu \geq 1$, τέτοιος ώστε να ισχύει: $\chi \geq 1/\nu$», ή, ισοδυνάμως,

(β). «Εάν $|\chi| \leq 1/\nu$, για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 1$, τότε $\chi = 0$ (δηλαδή, ο αριθμός 0 είναι ο μόνος, ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση: $|\chi| \leq 1/\nu$, για κάθε $\nu \geq 1$)» ή, ισοδυνάμως,

(γ). «Η ακολουθία $1/\nu$, όπου $\nu \geq 1$, τείνει στο 0, όταν το ν τείνει στο συν άπειρο».

Αντιθέτως, στο πλαίσιο της γενίκευσης του Robinson γίνεται, εξαρχής, δεκτό ότι: «Υπάρχουν θετικοί αριθμοί χ^*, τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\chi^* < 1/\nu$, για κάθε $\nu \geq 1$». Αυτοί οι αριθμοί, χ^*, συνιστούν τους «απειροστούς αριθμούς-ποσότητες (*infinitesmal numbers*)», ενώ οι αντίστροφοι αυτών, δηλαδή, οι αριθμοί $1/\chi^*$, συνιστούν τους «χωρίς-πέρας (άπειρους) αριθμούς (*infinite numbers*)». Το σύνολο όλων αυτών των αριθμών, δηλαδή των «απειροστών, πραγματικών, και απείρων αριθμών», καλείται «Σύνολο Μη-Προτύπων Πραγματικών (ή Υπερ-Πραγματικών) Αριθμών».[3] Έτσι, κάθε «μη-πρότυπος αριθμός» είναι:

(α). «Πεπερασμένος», εάν είναι κατά την απόλυτη τιμή του μικρότερος από *κάποιον* «θετικό πρότυπο πραγματικό αριθμό» (δηλαδή, από κάποιον συνήθη θετικό πραγματικό αριθμό), ή

(β). «Απειροστός», εάν είναι κατά την απόλυτη τιμή του μικρότερος από *κάθε* θετικό πρότυπο πραγματικό αριθμό, ή

(γ). «Άπειρος», εάν είναι κατά την απόλυτη τιμή του μεγαλύτερος από *κάθε* θετικό πρότυπο πραγματικό αριθμό.

[2] *Μετά* την κατασκευή του συνόλου των πραγματικών αριθμών, αποτελεί θεώρημα (όχι αξίωμα).

[3] Ίσως, οι πιο ευνόητες, σε επίπεδο λυκειακών σπουδών, εισαγωγές στην Μη-Πρότυπη Ανάλυση είναι εκείνες των Keisler (2000) και Crowell (2015).

Άρα, το 0 είναι ο μοναδικός πρότυπος πραγματικός αριθμός, ο οποίος είναι απειροστός. Και κάθε πρότυπος πραγματικός αριθμός είναι πεπερασμένος. Περαιτέρω, για κάθε πεπερασμένο μη-πρότυπο αριθμό, ψ, ορίζεται το «πρότυπο μέρος» αυτού: συμβολίζεται ως «st (ψ)», και είναι εκείνος ο μοναδικός πρότυπος πραγματικός αριθμός, ο οποίος διαφέρει από τον αριθμό ψ κατά απειροστή ποσότητα, ψ*, ήτοι

$$\psi \equiv \mathrm{st}\,(\psi) + \psi^*$$

Τέλος, ισχύουν τα ακόλουθα, όπου τα ψ_1, ψ_2 παριστούν πεπερασμένους μη-πρότυπους αριθμούς:

(α). $\mathrm{st}\,(\psi_1 + \psi_2) = \mathrm{st}\,(\psi_1) + \mathrm{st}\,(\psi_2)$

(β). $\mathrm{st}\,(\psi_1\,\psi_2) = \mathrm{st}\,(\psi_1)\,\mathrm{st}\,(\psi_2)$

(γ). Εάν $\psi_1 \leq \psi_2$, τότε $\mathrm{st}\,(\psi_1) \leq \mathrm{st}\,(\psi_2)$

(δ). Εάν η διαφορά $\psi_1 - \psi_2$ ισούται με κάποιον απειροστό αριθμό, τότε $\mathrm{st}\,(\psi_1) = \mathrm{st}\,(\psi_2)$.

Έτσι, η όλη κατασκευή δύναται να εικονισθεί ως εξής:

> Είναι σαν κάθε πρότυπος πραγματικός αριθμός να περιβάλλεται από ένα ασαφές (*fuzzy*) νέφος απειροστών, το οποίο συνιστά την *άλω* του. Και κάθε τέτοια άλως περιβάλλει έναν πρότυπο πραγματικό αριθμό, ο οποίος συνιστά τη *σκιά* της. (Stewart, 1996, p. 82)

Η αρχική, σπερματική σύλληψη του Leibniz περί «απειροστών», επί της οποίας θεμελίωσε το διαφορικό λογισμό, σχετίζεται άμεσα με τη φιλοσοφική κοσμοαντίληψή του, η οποία αποκρυσταλλώθηκε, πολύ αργότερα, στο Μεταφυσικό Σύστημά του περί «Μονάδων» (αντιστοιχούν, τρόπον τινά, στα «απειροστά»), γνωστό ως «Μοναδολογία» (Leibniz, [1714] 2004). Σύμφωνα δε με ορισμένους ειδικούς, στην εμπροσθοφυλακή των οποίων βρίσκεται ο ασύλληπτος Kurt Friedrich Gödel, η Μη-Πρότυπη Ανάλυση του Robinson αποκαθιστά σημαντικά, για πρώτη φορά μετά από τρεις αιώνες, την περί «απειροστών» σύλληψη του Leibniz. Και από αυτήν την σύλληψη δεν μπορούσε εύκολα να απαγκιστρωθεί, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε, ακόμα και ο Engels.[4]

[4] Βλέπε, μεταξύ άλλων, το κατά τον Engels φυσικο-χημικό ανάλογο της διαφόρισης, στο παράδειγμα του κύβου από θειάφι, το οποίο κατασκευάζει και πραγματεύεται στη *Διαλεκτική της Φύσης* (Ένγκελς, [1873-1886] χ.χ., σσ. 397-401). Πάντως, κατά τον μαθηματικό και Καθηγητή Φιλοσοφίας Jean Van Heijenoort (1985), ευρύτερα γνωστό ως προσωπικό γραμματέα του Leon Trotsky, ο Engels τελούσε υπό πλήρη άγνοια και σύγχυση στους τομείς των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών, ενώ ακολουθούσε, όχι και τόσο μακρυά, ο Marx. Ο/η αναγνώστης ας κρίνει! Σχετικά, τώρα, με την έκδοση των *Μαθηματικών Χειρογράφων* του Marx στη Λ. Δ. Κίνας, και τις συζητήσεις που αυτή προκάλεσε, εκεί, σε συνδυασμό με τη Μη-Πρότυπη Ανάλυση, βλέπε Dauben (2003). Για μία χρήσιμη σύνοψη των κύριων ζητημάτων που μένουν ανοιχτά με τη Μη-Πρότυπη Ανάλυση, βλέπε Strichartz (2000, pp. 65-66). Τέλος, κατά τον Καστοριάδη ([1975] 1981, σελ. 346, υποσημείωση 14), «Αν ο Νεύτων και ο Λάιμπνιτς εγνώριζαν, κατά κακή τους τύχη, τα κριτήρια της τυποποιημένης μαθηματικής, δεν θα τολμούσαν ποτέ να δημοσιεύσουν τις ανακαλύψεις τους πάνω στο διαφορικό λογισμό. Η ανάλυση ήταν ένα λογικό

Στα ακόλουθα, εκκινώ με τη σύνθεση μίας παραβολής, την οποία αποκαλώ: «Η Παραβολή του Καλού πλην Σαδιστή Καθηγητή». Εν συνεχεία, εκθέτω τους αντιστοίχους στα προαναφερθέντα προσδιορισμούς της παραγώγου συνάρτησης, μεταξύ των οποίων και εκείνον του Marx. Τέλος, δίνω ένα και μόνο παράδειγμα, αλλά από τα κεντρικά, της εφαρμογής των μαθηματικών μελετών του Marx στα οικονομολογικά γραπτά του: συνίσταται στη διερεύνηση των σχέσεων ανάμεσα στο μέσο ποσοστό κέρδους, στο «ποσοστό υπεραξίας», στην «οργανική σύνθεση του κεφαλαίου» και στο λόγο καθαρού προϊόντος-κεφαλαίου, προκειμένου να προσδιοριστεί η μακροχρόνια κίνηση του ποσοστού κέρδους («Νόμος της Πτωτικής Κίνησης του Ποσοστού Κέρδους»).

2. Η Παραβολή του Καλού πλην Σαδιστή Καθηγητή

Κάποτε, ένας καθηγητής Πολιτικής Οικονομίας θέλησε να νουθετήσει έναν εύστροφο πλην επιπόλαιο φοιτητή του στο μάθημα της «Μικροοικονομικής Θεωρίας», όπου ο Διαφορικός Λογισμός-Οριακή Ανάλυση αποτελεί, ως γνωστόν, το κύριο μαθηματικό εργαλείο. Έτσι, του ανακοίνωσε ότι, στις τελικές εξετάσεις, έλαβε το βαθμό: 4.999…(*άπειρα* 9).

Ο φοιτητής θεώρησε ότι έχει λάβει βαθμό μικρότερο του 5 και, επομένως, ότι «κόβεται»…με τρόπο, μάλιστα, σαδιστικό! Αναζήτησε τον καθηγητή, και εκείνος του είπε: «Εάν αποδείξετε ότι ο βαθμός σας είναι ακριβώς ίσος με 5, τότε θα λάβετε βαθμό ίσο με 10. Εάν δεν το αποδείξετε, τότε θα ξαναδώσετε εξετάσεις. Ωστόσο, θα σας βοηθήσω, λέγοντας τα εξής:

$$4.999\ldots = 4 + (9/10) + (9/100) + (9/1000) + (9/10000)\ldots$$
$$= 4 + (9/10)\,[1 + (1/10) + (1/100) + (1/1000)\ldots]$$

Ας εστιάσουμε, λοιπόν, στο εντός αγκυλών άθροισμα, η τιμή του οποίου μας είναι άγνωστη, και ας γράψουμε:

$$\chi = 1 + (1/10) + (1/100) + (1/1000)\ldots$$

ή

$$\chi = 1 + (1/10)\,[1 + (1/10) + (1/100) + (1/1000)\ldots]$$

Άρα, έχουμε

$$\chi = 1 + (1/10)\,\chi$$

εξίσωση από την οποία έπεται ότι

$$\chi = 10/9$$

Επομένως, επιστρέφοντας στην αρχική εξίσωσή μας, λαμβάνουμε:

$$4.999\ldots = 4 + (9/10)(10/9) = 4 + 1 = 5$$

πορνείο επί ενάμιση αιώνα, έως ότου ο Cauchy και ο Weierstrass ξεκαθαρίσουν σχεδόν την κατάσταση. Πρβλ. Abraham Robinson, *Non-standard Analysis*, 1966, σσ. 280-282.». Πάντως, δεν φαίνεται ότι ο Καστοριάδης μπήκε στο κόπο να μελετήσει τα *Μαθηματικά Χειρόγραφα* του Marx – ούτε τότε, ούτε μετά.

δηλαδή, ότι ο βαθμός σας είναι ακριβώς ίσος με 5.

Ωστόσο, δεν θα πρέπει να μας διαφύγει ότι θα μπορούσαμε να γράψουμε και τα εξής:

$$\zeta_\nu = 1 + (1/10) + (1/10^2) + (1/10^3) + \ldots + (1/10^\nu)$$

ή, πολλαπλασιάζοντας με το 1/10,

$$(1/10)\ \zeta_\nu = (1/10) + (1/10^2) + (1/10^3) + \ldots + (1/10^{\nu+1})$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις, λαμβάνουμε:

$$(9/10)\ \zeta_\nu = 1 - (1/10^{\nu+1})$$

ή

$$\zeta_\nu = (10/9)\ [1 - (1/10^{\nu+1})]$$

Για ν τείνον στο συν άπειρο, το $1/10^{\nu+1}$ τείνει στο 0, και, επομένως,

$$\lim_{\nu\to+\infty} \zeta_\nu = 10/9 = \chi$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ο βαθμός σας τείνει στο 5, και όχι ότι είναι ακριβώς ίσος με 5.

Τελικά, τι από τα δύο ισχύει; Ή, για να θυμηθούμε τον Ζήνωνα τον Ελεάτη, ο Αχιλλέας φτάνει ή δεν φτάνει, τελικά, τη χελώνα;».

3. Προσδιορισμοί της Παραγώγου Συνάρτησης

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα και σε όρους Κλασικής Φυσικής, σώμα, το οποίο εκτελεί ελεύθερη πτώση εντός πεδίου βαρύτητας και στο «κενό», με μηδενική «αρχική ταχύτητα». Όπως γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο, το διανυόμενο διάστημα, s, ως συνάρτηση του χρόνου, t, διέπεται από νόμο με την ακόλουθη παράσταση:

$$s(t) = (1/2)\ g\ t^2$$

όπου το g παριστά την «επιτάχυνση της βαρύτητας», η οποία είναι (υποτίθεται ή θεωρείται) χρονικώς αμετάβλητη.

3.1. Leibniz και Newton

Ακολουθώντας τον Leibniz (επί της ουσίας, και τον Newton), λέμε ότι: Έστω η χρονική στιγμή t_1 (> 0), όπου το διανυθέν διάστημα ισούται με s_1, το οποίο υπολογίζεται από την αρχική εξίσωση, ήτοι $s_1 = (1/2)\ g\ (t_1)^2$. Θεωρούμε, λοιπόν, μία «απειροστή» μεταβολή του χρόνου, την οποία συμβολίζουμε με dt, και κατά την οποία το διάστημα, s_1, μεταβάλλεται κατά ds. Έτσι, το συνολικά διανυθέν διάστημα ισούται με s_1 + ds, το οποίο υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$s_1 + \mathrm{d}s = (1/2)\ g\ (t_1 + \mathrm{d}t)^2$$

ή

$$s_1 + \mathrm{d}s = (1/2)\ g\ [(t_1)^2 + 2\ t_1\ \mathrm{d}t + (\mathrm{d}t)^2]$$

ή, δεδομένου ότι $s_1 = (1/2)\ g\ (t_1)^2$,

$$\mathrm{d}s = (1/2)\ g\ [2\ t_1\ \mathrm{d}t + (\mathrm{d}t)^2] \qquad (1)$$

Τώρα, δεδομένου ότι, στο δεξιό μέρος της εξίσωσης (1), ο όρος $(\mathrm{d}t)^2$ («απειροστό ανωτέρας τάξεως») είναι «πολύ μικρός» σε σχέση με τον όρο $2\, t_1\, \mathrm{d}t$, τον παραλείπουμε. Έτσι, προκύπτει:

$$\mathrm{d}s = (1/2)\, g\, 2\, t_1\, \mathrm{d}t = g\, t_1\, \mathrm{d}t$$

Τέλος, διαιρώντας την τελευταία εξίσωση με το $\mathrm{d}t$, προκύπτει η τιμή της παραγώγου συνάρτησης στο χρονικό σημείο $t = t_1$:

$$\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = g\, t_1 \tag{2}$$

και, επομένως, η παράγωγος συνάρτηση της συνάρτησης $s(t)$ ισούται με: $g\, t$.

Η εξίσωση (2) δίνει, λοιπόν, την τιμή της παραγώγου συνάρτησης του διανυόμενου διαστήματος, κατά τη χρονική στιγμή t_1, ή, αλλιώς, εκείνο που ορίζεται ως «στιγμιαία ταχύτητα» του σώματος κατά τη χρονική στιγμή t_1. Και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία, δηλαδή υπολογίζοντας την παράγωγο συνάρτηση της στιγμιαίας ταχύτητας, βρίσκουμε ότι εκείνη ισούται με g, δηλαδή με την «επιτάχυνση (της βαρύτητας)».

Εναλλακτικά, διαιρούμε την εξίσωση (1) με το $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = g\, t_1 + (1/2)\, g\, \mathrm{d}t$$

και, εν συνεχεία, θέτουμε, στο δεξιό μέρος, $\mathrm{d}t = 0$. Έτσι, προκύπτει:

$$\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = g\, t_1$$

εξίσωση η οποία συμπίπτει με την εξίσωση (2)!

Ο Marx αποκαλεί τις ως άνω διαδικασίες ως «ταχυδακτυλουργικές», και το διαφορικό λογισμό των Leibniz-Newton ως «μυστικιστικό», διότι:

(i). Βασίζονται στην εισαγωγή μη-αυστηρά ορισμένων «απειροστών ποσοτήτων», και στο χειρισμό τους ως μη-μηδενικών και, *ταυτοχρόνως*, ως μηδενικών ποσοτήτων.

(ii). Στην πραγματικότητα, προϋποθέτουν ότι γνωρίζουμε εκ των *προτέρων* ότι ορισμένοι, ανά περίπτωση, όροι δεν ανήκουν στην παράγωγο συνάρτηση.

(iii). Από ό,τι φαίνεται δίνουν, στην καλύτερη περίπτωση, μία *προσέγγιση* της παραγώγου συνάρτησης.

Μετά τον Marx, και χωρίς να γνωρίζει τα σχετικά χειρόγραφά του, ο Vladimir Ilyich Lenin παρατηρούσε (στα 1914-1916), σχετικά με τα όσα γράφει ο Georg Wilhelm Friedrich Hegel (στην *Επιστήμη της Λογικής*) για το διαφορικό-ολοκληρωτικό λογισμό, τα εξής:

> Στον απειροστικό λογισμό δεν λαμβάνεται υπόψη μία ορισμένη [επίγνωστη] ανακρίβεια, εντούτοις το λαμβανόμενο αποτέλεσμα δεν είναι κατά προσέγγιση αλλά *απολύτως* ακριβές! Παρ' όλα αυτά, το να αξιώσει κανείς να βρει *Rechtfertigung* [δικαιολόγηση], εδώ, «δεν είναι το ίδιο περιττό» «με το να αξιώνει απόδειξη του δικαιώματος να χρησιμοποιεί τη δική του μύτη» [υπαινιγμός στο δίστιχο: «Το Ζήτημα του Δικαιώματος», από το σατιρικό ποίημα του Friedrich von Schiller: «Οι Φιλόσοφοι»]. Η απάντηση του Hegel είναι περίπλοκη, *abstruse*

[σκοτεινή] etc., etc.. Πρόκειται για ζήτημα των *Ανωτέρων* Μαθηματικών. Σύγκρινε με *Engels*, για το διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό [εννοούνται οι σχετικές επισημάνσεις του Engels στο έργο του: *Αντι-Ντύρινγκ*]. […] Λεπτομερής εξέταση του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού [από τον Hegel], με παραθέσεις – [από τους] Newton, Lagrange, Carnot, Euler, Leibniz, etc., etc., – οι οποίες δείχνουν πόσο ενδιαφέρουσα βρήκε ο Χέγκελ αυτή την «εξαφάνιση» των απειροστών ποσοτήτων, αυτού του «ενδιαμέσου μεταξύ Είναι και Μη-Είναι». Άνευ μελέτης των Ανωτέρων Μαθηματικών, όλο αυτό είναι ακατανόητο. Χαρακτηριστικός είναι [λοιπόν – Θ. Μ.] ο τίτλος: Carnot : «Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal» [«Στοχασμοί επί της Μεταφυσικής του Λογισμού των Απειροστών»]!!! (βλέπε Λένιν, 1895-1916, σσ. 107-108)

Και πολύ πριν από τον Marx, ο Επίσκοπος Berkeley (1734) αποκαλούσε τα «απειροστά» των Leibniz και Newton ως «φαντάσματα εκλιπόντων ποσοτήτων». Έτσι, συμπέραινε ότι κανένας Μαθηματικός, ο οποίος πιστεύει σε αυτούς τους παραλογισμούς, δεν θα μπορούσε ευλόγως να αντιταχθεί στα θαυματουργικά ή, αλλιώς, υπερφυσικά δόγματα της χριστιανικής θρησκείας.

3.2. Cauchy και Weierstrass

Εφαρμόζοντας τον κατά Cauchy-Weierstrass ορισμό της παραγώγου συνάρτησης, $s'(t_1)$, στο χρονικό σημείο $t = t_1$, ο οποίος βασίζεται στην έννοια του ορίου, προκύπτει:

$$s'(t_1) \equiv \lim_{t\to t_1} [(s(t) - s(t_1))/(t - t_1)] = (1/2)\ g \lim_{t\to t_1} \{[t^2 - (t_1)^2]/(t - t_1)\}$$

ή, δεδομένου ότι $t^2 - (t_1)^2 = (t - t_1)\ (t + t_1)$,

$$s'(t_1) = (1/2)\ g \lim_{t\to t_1} \{[(t - t_1)\ (t + t_1)]/(t - t_1)\}$$

ή, τελικά,

$$s'(t_1) = (1/2)\ g \lim_{t\to t_1} (t + t_1) = (1/2)\ g\ (t_1 + t_1) = g\ t_1$$

εξίσωση της οποίας το δεξιό μέρος συμπίπτει με εκείνο της εξίσωσης (2)!

Εδώ, *όμως*, νοείται, εξορισμού, ότι για κάθε θετικό αριθμό ε (οσοδήποτε μικρό) υπάρχει θετικός αριθμός δ, τέτοιος ώστε: εάν $0 < |\ t - t_1| < \delta$, τότε

$$|[(s(t) - s(t_1))/(t - t_1)] - s'(t_1)\,| < \varepsilon$$

3.3. Marx

Ο κατά Marx ο προσδιορισμός της παραγώγου συνάρτησης γίνεται μέσω του ακόλουθου *αλγορίθμου*:

Βήμα 1. Ορίζουμε τη συνάρτηση *δύο* πραγματικών μεταβλητών:

$$S(t, t_1) \equiv s(t) - s(t_1)$$

Βήμα 2. Εκφράζουμε τη νέα συνάρτηση, $S(t, t_1)$, ως

$$S(t, t_1) = (t - t_1)\ \sigma(t, t_1)$$

Η συνάρτηση $\sigma(t, t_1)$ είναι η κατά Marx «προκαταρτική παράγωγος συνάρτηση». Στο παράδειγμά μας, προκύπτει: $\sigma(t, t_1) \equiv (1/2)\ g\ (t + t_1)$.

Βήμα 3. Η τιμή της παραγώγου συνάρτησης, $s'(t_1)$, στο σημείο $t = t_1$, εξάγεται από τη συνάρτηση $\sigma(t, t_1)$, θέτοντας $t = t_1$. Αυτή η συνάρτηση είναι η κατά Marx «τελική παράγωγος συνάρτηση», στο σημείο $t = t_1$, η οποία μπορεί, τώρα, να *συμβολιστεί* ως ds/dt. Στο παράδειγμά μας, προκύπτει:

$$ds / dt \equiv s'(t_1) = (1/2)\ g\ (t_1 + t_1) = g\ t_1$$

εξίσωση της οποίας το δεξιό μέρος συμπίπτει με εκείνο της εξίσωσης (2)!

Μέσω αυτού του αλγορίθμου αποφεύγεται, λοιπόν, η χρήση τόσο των «απειροστών ποσοτήτων», των Leibniz και Newton, όσο και της έννοιας του ορίου, για την οποία η «Παραβολή του Καλού πλην Σαδιστή Καθηγητή» μας έδειξε ότι δεν είναι προφανής, και την εποχή του Marx δεν ήταν καθόλου προφανής. Όπως δε έχει τονιστεί από τον Καθηγητή Μαθηματικών του *MIT* Dirk Jan Struik (1948), μόνο ο κατά Marx προσδιορισμός καθιστά εμφανές ότι, κατά την εξαγωγή της παραγώγου συνάρτησης, η διαφορά $t - t_1$ και, συνεπώς, η διαφορά $s(t) - s(t_1)$, όχι μόνο τείνουν στο 0 αλλά και ισούνται με το 0, δύο πράγματα τα οποία δεν είναι πάντοτε ταυτόσημα μεταξύ τους.

Εν κατακλείδι, λοιπόν, στο πλαίσιο του μαρξικού προσδιορισμού:

(i). Το σύμβολο *ds/dt* τίθεται στη θέση του 0/0 ως *καθαρό* σύμβολο μίας περατωθείσας διαδικασίας «άρνησης της άρνησης», η οποία καλείται «παραγώγιση» (Μαρξ, 1987, σσ. 49-61, 89 και 148-158).[5]

(ii). Ορίζεται, με καινοτόμο για τα Μαθηματικά τρόπο, το «διαφορικό της εξαρτημένης μεταβλητής», *ds*, μέσω μίας *τελεστικής* εξίσωσης, δηλαδή ως:

$$ds = s'(t)dt$$

θεώρηση η οποία προτάθηκε (σε ανεξαρτησία από τον Marx) αρκετά αργότερα, από τον Jacques Salomon Hadamard (αναλυτικά, βλέπε Glivenko, 1935).[6]

---

[5] Η κατά σειρά πρώτη «άρνηση» έγκειται στο ότι αρχικά τίθεται: $t \neq t_1$, και η «άρνηση» αυτής, ήτοι η «άρνηση της άρνησης», έγκειται στο ότι τίθεται, στο *Βήμα 3* του μαρξικού αλγορίθμου, $t = t_1$. Ο «Νόμος άρνησης της άρνησης» (**N**$_3$) είναι ο κατά σειρά τρίτος νόμος του Διαλεκτικού Υλισμού, όπως εκείνοι προσδιορίστηκαν από τους Marx-Engels, και συνιστούν τους νόμους του «αέναου γίγνεσθαι» ή, αλλιώς, του «μη-είναι-ακόμη». Οι άλλοι δύο νόμοι είναι, κατά σειρά, οι εξής: «Αλληλοδιείσδυση, ενότητα και διαπάλη, των πολικά αντιτιθεμένων πλευρών, οι οποίες ενυπάρχουν στα αντικείμενα ή φαινόμενα» (**N**$_1$), και «Μετατροπή των ποσοτικών μεταβολών σε ποιοτικές μεταβολές, και αντιστρόφως» (**N**$_2$). Αυτοί οι τρεις νόμοι προσδιορίζουν, αντιστοίχως, την ενδογενή πηγή (ο **N**$_1$), τον τρόπο (ο **N**$_2$), και, τέλος, την κύρια κατεύθυνση (ο **N**$_3$) της πραγματοποίησης όλων των μεταβολών, οι οποίες συντελούνται στη Φύση, στην ανθρώπινη κοινωνία, και στη Νόηση. Ειδικά για το **N**$_1$ στα Μαθηματικά και στη διδασκαλία τους, βλέπε Gerdes (2014, Chap. 7).

[6] Το άρθρο του Glivenko περιέχεται, σε αγγλική μετάφραση, στον τόμο Marx (1994). Το πόσο μπερδεμένα εμφανίζονται, εκ πρώτης όψεως, τα πράγματα, ακόμα και κατά τη σύγχρονη διδασκαλία του αντικειμένου, δύναται να διαπιστωθεί με τη μελέτη, για παράδειγμα, της παιδαγωγικής εφαρμογής, η οποία εκτίθεται στο πανεπιστημιακό εγχειρίδιο του Brand ([1955], 1984, σσ.151-152).

Από την άλλη πλευρά, δηλαδή εκείνη της κριτικής, ο κατά Marx προσδιορισμός μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε εκείνη την κλάση συναρτήσεων, οι οποίες είναι γνωστές ως «Αναλυτικές Συναρτήσεις», και στις οποίες, επομένως, το *Βήμα 2* του μαρξικού αλγορίθμου είναι όντως υλοποιήσιμο. Μία συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, $f(x)$, καλείται «αναλυτική», σε κάποιο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν και μόνο όταν η σειρά απείρων όρων:

$$a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \ldots$$

(όπου τα a παριστούν πραγματικούς αριθμούς) συγκλίνει στην $f(x)$, για κάθε x στη γειτονιά του x_0. Σημειώνεται, ωστόσο, ότι σε αυτήν την κλάση υπάγονται, *συνήθως*, οι συναρτήσεις εκείνες (πραγματικών ή και μιγαδικών μεταβλητών), οι οποίες υποτίθενται κατά τη μαθηματική διερεύνηση μη-γνησίως μαθηματικών αντικειμένων, δηλαδή στις διάφορες «Εφαρμοσμένες Επιστήμες» (αναλυτικά, βλέπε Penrose, 2010, Κεφ. 6 και σελ. 191).

Τέλος, θα πρέπει να αναφερθεί ότι, σε όρους της Ιστορίας των Μαθηματικών, ο μαρξικός προσδιορισμός είναι παρόμοιος με εκείνον που είχε προτείνει ο αυτοδίδακτος Άγγλος Μαθηματικός John Landen (1764). Αυτό το όνομα είναι οικείο στις/στους σύγχρονους σπουδαστές μέσω των «Μετασχηματισμών Landen», οι οποίοι χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό «Ελλειπτικών Ολοκληρωμάτων». Ο Marx είχε πληροφορηθεί από βιβλιογραφικές πηγές την ύπαρξη του βιβλίου του Landen, το οποίο κέντρισε το ενδιαφέρον του, αλλά δεν κατόρθωσε, τελικά, να το βρει (βλέπε Μαρξ, 1987, σελ. 84, και Παράρτημα IV, καθώς και Struik, 1986, pp. 383-389). Ο προσδιορισμός του Landen καλείται «καθαρά αλγεβρικός», και επαινέθηκε από τον Joseph-Louis Lagrange για τη θεωρητική αυστηρότητά του. Ωστόσο, κρίθηκε ως πολύπλοκος κατά την εφαρμογή του, στη γενική περίπτωση, και, στη συνέχεια, λησμονήθηκε. Η εν λόγω πολυπλοκότητα καθίσταται εμφανής, για παράδειγμα, στην περίπτωση εύρεσης της παραγώγου της συνάρτησης: $f(x) = a^x$, την οποία πραγματεύεται ο Μαρξ (1987, σσ. 58-59), βάσει του αλγορίθμου του.

Έχει πια καταστεί τετριμμένη, καίτοι ήταν εξαρχής άγονη, εκείνη η συζήτηση, περί – υποτιθέμενης – αντίθεσης ανάμεσα στον «νεαρό» και στον «ύστερο-ντετερμινιστή» Marx, την οποία ανακινούσαν διάφοροι σχολιαστές του Διαλεκτικού-Ιστορικού Υλισμού (βλέπε, για παράδειγμα, Ντεμπόρ, [1967] 1986, Κεφ. 4, και Καστοριάδης, [1975] 1981, σσ. 84-105). Τα γεγονότα από την Ιστορία των Επιστημών διδάσκουν ότι εξαιρετικά δύσκολα δύναται να προχωρήσει κανείς επιστημονικά κατά τη δύση της ζωής του, και, μάλιστα, σε ανοίκειο πεδίο. Άρα, ο Marx έμεινε πάντα νέος.

3.4. Robinson

Συμβολίζουμε με $s^*(t)$ την επέκταση της συνάρτησης $s(t)$ στο σύνολο των μη-προτύπων πραγματικών αριθμών, και με ds^*, dt^* $(\neq 0)$ τα απειροστά του διαστήματος και του χρόνου, αντιστοίχως, ορισμένα στο ίδιο σύνολο.

Κατά τη Μη-Πρότυπη Ανάλυση, η παράγωγος συνάρτηση, $s'(t_1)$, στο χρονικό σημείο $t = t_1$, ορίζεται ως:

$$s'(t_1) \equiv \text{st}\ (ds^*/dt^*)$$

Άρα,

$$s'(t_1) = \text{st}\ [(s^*(t_1 + dt^*) - s^*(t_1))/dt^*]$$

ή

$$s'(t_1) = \text{st}\{[(g\ t_1\ dt^*)/\ dt^*] + [(1/2)\ g\ (dt^*)^2/\ dt^*]\}$$

ή

$$s'(t_1) = \text{st}\ (\text{g}\ t_1) + \text{st}\ [(1/2)\ g\ dt^*)]$$

ή

$$s'(t_1) = g\ t_1 + 0 = g\ t_1$$

4. Η Συνάρτηση του Ποσοστού Κέρδους και το Όριό της

Ο Marx διερεύνησε αναλυτικά τη διαχρονική κίνηση του μέσου ποσοστού κέρδους (εκφρασμένου, κατά βάση, σε όρους εργασιακών αξιών) στον κεφαλαιοκρατικό τρόπο παραγωγής της εποχής του. Δηλαδή, και αυτό πρέπει να υπογραμμιστεί εξαρχής, στον *ανεπτυγμένο προ-μονοπωλιακό* (κατά Λένιν, 1915-6, 1917) κεφαλαιοκρατικό τρόπο παραγωγής.

Το συμπέρασμά του ήταν ότι, υπό *ορισμένες* συνθήκες, τις οποίες και – κατά βάση – προσδιόρισε, αυτό το μέγεθος κατανάγκην μειώνεται *μακροχρονίως*.[7]

Το εν λόγω ποσοστό κέρδους, r, ορίζεται, από τον Marx, ως

$$r \equiv \upsilon/(\sigma + \mu) \qquad (3)$$

όπου το υ παριστά τη συνολική «υπεραξία» (εργασιακή αξία συνολικού υπερπροϊόντος), η οποία κατανέμεται σε επιχειρηματικά κέρδη, γαιοπροσόδους και τόκους, το σ το «σταθερό κεφάλαιο» (εργασιακή αξία των συνολικών, προκαταβεβλημένων μέσων παραγωγής), και το μ το «μεταβλητό κεφάλαιο» (εργασιακή αξία των συνολικών μισθών, οι οποίοι υποτίθεται ότι καταβάλλονται στην αρχή της περιόδου παραγωγής).

4.1. Οι φαινόμενες μεταβλητές της συνάρτησης

Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή, στο δεξιό μέρος της εξίσωσης (3), με το υ προκύπτει:

[7] Για μία πρόσφατη, κριτική έρευνα επί των σχετικών μαρξικών χειρογράφων, βλέπε Kurz (2018).

$$r = m/(C + 1) \qquad (4)$$

όπου το $m \equiv \upsilon/\mu$ παριστά το «ποσοστό υπεραξίας ή εκμετάλλευσης της εργασιακής δύναμης», και το $C \equiv \sigma/\mu$ την «οργανική σύνθεση του κεφαλαίου».

Έτσι, το ποσοστό κέρδους *καταρχάς* εμφανίζεται ως συνάρτηση δύο μεταβλητών, ήτοι των m και C. Ειδικότερα, εμφανίζεται ως γνησίως αύξουσα συνάρτηση του m, και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του C. Το δε m αποτελεί, ως γνωστόν, (α) γνησίως αύξουσα συνάρτηση της παραγωγικότητας της εργασίας στον τομέα, ο οποίος παράγει, άμεσα και έμμεσα, τα εμπορεύματα κατανάλωσης των προλεταρίων, και (β) γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του ύψους πραγματικού ωρομίσθιου.

Πολλοί μελετητές, μαρξιστές και μη-μαρξιστές, τόσο στο εξωτερικό όσο και στην Ελλάδα, είχαν και έχουν την άποψη ότι ο Marx θεμελίωσε την πτωτική κίνηση του ποσοστού κέρδους στην άνευ πεπερασμένου ορίου αύξηση της οργανικής σύνθεσης του κεφαλαίου. Αυτή η αύξηση αντανακλά, υποτίθεται, την εντατική εκμηχάνιση της παραγωγικής διαδικασίας, η οποία στοχεύει στη συνεχή άνοδο της παραγωγικότητας της εργασίας.

Ο πιο ευνοϊκός τρόπος έκθεσης της ως άνω άποψης είναι ο ακόλουθος: Η εξίσωση (4) μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής:

$$r = m(1 - \alpha), \text{ όπου } \alpha = C/(C + 1) = 1/[1 + (1/C)] < 1$$

Εάν, λοιπόν, το C αυξάνεται συνεχώς και τείνει στο συν άπειρο, τότε το α αυξάνεται συνεχώς, και τείνει στο 1. Άρα, το ποσοστό κέρδους τείνει στο 0, μακροχρονίως.

4.2. Οι πραγματικές μεταβλητές της συνάρτησης

Ο ως άνω συλλογισμός είναι μαθηματικά εσφαλμένος. Διότι, πρωτίστως, παραβλέπει δύο παράγοντες σταθερής επενέργειας:

(i). Τη σχετική διαχρονική κίνηση του ποσοστού υπεραξίας ως προς την οργανική σύνθεση του κεφαλαίου.

(ii). Το ότι η οργανική σύνθεση του κεφαλαίου συναρτάται: (α) ευθέως με το ποσοστό υπεραξίας, και (β) αντιστρόφως με το λόγο καθαρού προϊόντος-κεφαλαίου, ήτοι με τη λεγομένη παραγωγικότητα του κεφαλαίου (εκφρασμένη σε εργασιακές αξίες). Συγκεκριμένα, ισχύει:

$$C = [\sigma/(\mu + \upsilon)][(\mu + \upsilon)/\mu] = (1/\pi_C)(1 + m)$$

όπου το $\pi_C = (\mu + \upsilon)/\sigma$ παριστά την παραγωγικότητα του κεφαλαίου, δεδομένου ότι η εργασιακή αξία του καθαρού προϊόντος ισούται με: $\mu + \upsilon$. Συνεπώς, η εξίσωση (4) γράφεται ως εξής:

$$r = (m\pi_C)/(1 + m + \pi_C)$$

ή

$$r = \pi_C/\{[(1 + \pi_C)/m] + 1\} = m/\{[(1 + m)/\pi_C] + 1\} \qquad (5)$$

Άρα, το ποσοστό κέρδους είναι, *τελικά*, γνησίως αύξουσα συνάρτηση τόσο του ποσοστού υπεραξίας όσο και της παραγωγικότητας του κεφαλαίου.

4.3. Η κίνηση του ποσοστού κέρδους και τα πρωτεύοντα πορίσματα

Από τις εξισώσεις (4) και (5) εξάγονται τα ακόλουθα:

(i). Οι διαχρονικές εξελίξεις της οργανικής σύνθεσης του κεφαλαίου και του ποσοστού κέρδους καθορίζονται από αλληλεπιδράσεις ανάμεσα σε τεχνικές και κοινωνικές συνθήκες παραγωγής. Η πλευρά των τεχνικών συνθηκών παραγωγής εκφράζεται στα ύψη των παραγωγικοτήτων εργασίας και κεφαλαίου, ενώ η πλευρά των κοινωνικών συνθηκών παραγωγής εκφράζεται στο ύψος (και σύνθεση) του πραγματικού ωρομισθίου.

(ii). Για πεπερασμένο ύψος του ποσοστού υπεραξίας (της παραγωγικότητας του κεφαλαίου), το ύψος του ποσοστού κέρδους φράσσεται από εκείνο της παραγωγικότητας του κεφαλαίου (του ποσοστού υπεραξίας), ήτοι : $r < \pi_C$ και $r < m$, αντιστοίχως. Ειδικότερα, το ποσοστό κέρδους τείνει στην παραγωγικότητα του κεφαλαίου (τείνει στο ποσοστό υπεραξίας), όταν το ποσοστό υπεραξίας (η παραγωγικότητα του κεφαλαίου) τείνει στο συν άπειρο.

(iii). Εάν η παραγωγικότητα του κεφαλαίου: (α) μειώνεται συνεχώς, κατά μήκος του χρόνου, *και* (β) τείνει στο 0, τότε το ποσοστό κέρδους κατανάγκην μειώνεται μακροχρονίως, και τείνει στο 0, *ανεξαρτήτως* του εύρους των κινήσεων του ποσοστού υπεραξίας. Αυτό συνάγεται, ακριβώς, από το γεγονός ότι: $r < \pi_C$.

Αντιστρόφως, εάν η παραγωγικότητα του κεφαλαίου δεν μειώνεται (ήτοι παραμένει σταθερή ή αυξάνεται), τότε το ποσοστό κέρδους δεν δύναται να μειώνεται, εκτός εάν μειώνεται το ποσοστό υπεραξίας.

(iv). Σύμφωνα με την παραδοσιακή ορολογία των Cauchy-Weierstrass (βλέπε, για παράδειγμα, Brand, [1955] 1984, σελ. 140), μπορεί να λεχθεί ότι: Καθώς ο χρόνος τείνει στο συν άπειρο, τα r και π_C αποτελούν «*απείρως μικρές* συναρτήσεις» του χρόνου, εάν τείνουν στο 0. Και επειδή το m δεν τείνει στο 0, έπεται ότι ο λόγος

$$r/\pi_C = 1/\{[(1 + \pi_C)/m] + 1\}$$

τείνει σε μία θετική τιμή, και, άρα, ότι τα r και π_C αποτελούν «απείρως μικρές συναρτήσεις της *ιδίας τάξεως*». Εάν δε το m τείνει στο συν άπειρο, ο ως άνω λόγος τείνει στο 1 και, επομένως, τα r και π_C αποτελούν «*ισοδύναμες* συναρτήσεις», καθώς ο χρόνος τείνει στο συν άπειρο. Αντιθέτως, εάν το π_C μειώνεται αλλά δεν τείνει στο μηδέν, και το m τείνει στο συν άπειρο, το r όχι μόνο δεν τείνει στο 0, αλλά και δύναται, για παράδειγμα, να αυξάνεται συνεχώς ή από ένα χρονικό σημείο και μετά, καίτοι ο λόγος

$$r/m = 1/\{[(1 + m)/\pi_C] + 1\}$$

τείνει 0.

(v). Έστω g ($\equiv \sigma + \mu + \upsilon$) το ακαθάριστο προϊόν της οικονομίας, εκφρασμένο σε εργασιακές αξίας. Όπως εύκολα διαπιστώνεται, ισχύει:

$$\upsilon/g = 1/[(1/r) + 1]$$

Επομένως, εάν το π_C μειώνεται συνεχώς και τείνει στο 0, τότε και η συνολική υπεραξία ως *κλάσμα* του ακαθάριστου προϊόντος, υ/g, μειώνεται μακροχρονίως, και τείνει στο 0 (διότι, όπως ήδη διαπιστώθηκε, το r μειώνεται μακροχρονίως και τείνει στο 0).

Βάσει όλων αυτών, συμπεραίνεται ότι, στο *αινιγματικό* ερώτημα: «Πώς είναι δυνατόν να μειώνεται μακροχρονίως το ποσοστό κέρδους, όταν αυξάνεται το ποσοστό υπεραξίας;», το οποίο απασχολούσε τον Marx και, πριν από αυτόν, όλους τους Κλασικούς οικονομολόγους, η αψευδής απάντηση είναι: Πρέπει και αρκεί η παραγωγικότητα του κεφαλαίου να μειώνεται συνεχώς και να τείνει στο 0. Αυτή δε η απάντηση δεν έχει ανάγκη από οποιαδήποτε εμπειρική μέτρηση, προκειμένου να θεωρηθεί έγκυρη, και συνιστά το «Νόμο της Πτωτικής Κίνησης του Ποσοστού Κέρδους» του Marx.

Κατά την εποχή του ανεπτυγμένου προ-μονοπωλιακού καπιταλισμού, οι όποιοι παράγοντες οδηγούσαν το ποσοστό υπεραξίας σε – οσοδήποτε μεγάλες – ανοδικές κινήσεις, δεν αποτελούσαν αιτίες, οι οποίες αντιδρούσαν στη μακροχρόνια μείωση του ποσοστού κέρδους. Δηλαδή, κατά την ορολογία του Marx, δεν αποτελούσαν «*αντιδρώσες αιτίες*». Αντιδρώσες αιτίες αποτελούσαν *μόνο* εκείνοι οι παράγοντες, οι οποίοι οδηγούσαν την παραγωγικότητα του κεφαλαίου σε μη-καθοδικές κινήσεις. Κατά την εν λόγω εποχή, όμως, οι τελευταίοι αυτοί παράγοντες ήταν – ας το πούμε έτσι – «απειροστά ανωτέρας τάξεως», από εμπειρική άποψη, και, έτσι, ο Marx – ορθώς – τους αντιπαρήλθε κατά τον προσδιορισμό της μακροχρόνιας τροχιάς του ποσοστού κέρδους.

Τέλος, θα πρέπει να αναφερθεί ότι η προηγηθείσα διερεύνηση ισχύει, επί της ουσίας, και για την πραγματοκρατική περίπτωση όπου το ποσοστό κέρδους και, συνεπώς, οι προσδιοριστικοί του παράγοντες εκφράζονται σε τιμές (είτε τιμές παραγωγής είτε τιμές αγοράς), και όχι σε εργασιακές αξίες. Η πλήρης απόδειξη και οι βασικότερες συνεπαγωγές της δόθηκαν, κατά πρώτον, από τον Nobuo Okishio (1961, 1972). Ωστόσο, νεότερες έρευνες επί των χειρογράφων του Piero Sraffa έχουν δείξει ότι αυτός είχε εντοπίσει και γενικεύσει, κατά τις αρχές της δεκαετίας του 1940, το κύριο ζήτημα στη μαρξική διερεύνηση της πτωτικής κίνησης στου ποσοστού κέρδους, δηλαδή τη συνεχή μείωση της παραγωγικότητας του κεφαλαίου (βλέπε Gehrke and Kurz, 2018, pp. 435-440). Δυστυχώς, πολλοί συγγραφείς δεν κατανόησαν την απόδειξη του Okishio, άλλοι άσκησαν άστοχη κριτική, και ορισμένοι, τέλος, τις παρουσίασαν για δικές τους.[8]

[8] Μόνο σε έναν, και Έλληνα, ανήκει η τιμή ότι, εντός ενός και του αυτού πονήματός του, επέτυχε και τα τρία.

4.4. Δευτερεύοντα πορίσματα και αξιολόγηση

Από τη διερεύνηση της πτωτικής κίνησης του ποσοστού κέρδους, την οποία μας άφησε ο Marx, οι σταλινικοί οικονομολόγοι (όπως – ορισμένοι – τους αποκαλούν) δεν άντλησαν τις – σοσιαλδημοκρατικής και τροτσκιστικής εμπνεύσεως – εικασίες περί: «μακρών κυμάτων (*long waves*) ανάπτυξης», μακροχρόνιας μείωσης της συνολικής υπεραξίας ή και των συνολικών κερδών, και εσχατολογικής αυτο-κατάρρευσης ή, αναλόγως των επιθυμιών ή και βλέψεων του καθενός, αθανασίας του κεφαλαιοκρατικού τρόπου παραγωγής (*à la* Nikolai Dmitriyevich Kondratiev, Rosa Luxemburg, Henryk Grossman κ.ά.).

Αντιθέτως, οι «σταλινικοί οικονομολόγοι» άντλησαν, κατά λογική σειρά, τα συνεπή (τόσο ως προς τη μαρξική διερεύνηση της πτωτικής κίνησης του ποσοστού κέρδους όσο και μεταξύ τους) πορίσματα περί:

(α) μακροχρόνιας μείωσης του επιτοκίου, και, συνεπώς, αύξησης της τιμής της γης, των μετοχών κ.λπ.,

(β) επίτασης των ενδογενών αντιθέσεων του κεφαλαιοκρατικού συστήματος, οι οποίες εκδηλώνονται με οικονομικές διακυμάνσεις και κρίσεις «γενικής υπερπαραγωγής κεφαλαίου και εμπορευμάτων»,

(γ) ανάπτυξης του μονοπωλιακού ανταγωνισμού,

(δ) διόγκωσης των διεθνικών κινήσεων χρηματικών κεφαλαίων, έναντι των εξαγωγών-εισαγωγών εμπορευμάτων (για μία εξαιρετικά ενδιαφέρουσα, πρόσφατη πραγμάτευση, βλέπε Eugeni, 2016), και, βάσει όλων των προηγουμένων, τελικά,

(ε) διαμόρφωσης του διεθνικού ιμπεριαλιστικού συστήματος (βλέπε, Σεγκάλ, [1936] χ.χ., σσ. 157-174, και Κεφ. 11, και Ινστιτούτο Οικονομίας της Ακαδημίας Επιστημών της ΕΣΣΔ, [1954] 1961, σσ. 204-207, 217-218, και Κεφ. 17-21).

Εν κατακλείδι, λοιπόν, η διερεύνηση της κίνησης του ποσοστού κέρδους είναι οικονομολογικά περίπλοκη, ενώ από μαθηματική άποψη βασίζεται στο διαφορικό λογισμό-οριακή ανάλυση. Ο Marx κατόρθωσε όχι μόνο να τη θέσει σε στέρεη βάση αλλά και να την ολοκληρώσει, εξαιρουμένου του ότι δεν διασαφήνισε το εξής: Δεν αρκεί η παραγωγικότητα του κεφαλαίου να μειώνεται συνεχώς. Πρέπει, επίσης, να τείνει στο 0.[9]

Όμως, ούτε αυτή η έλλειψη ούτε το – πολλαπλά επαληθευμένο – γεγονός ότι ο κεφαλαιοκρατικός τρόπος παραγωγής στο *μονοπωλιακό* στάδιό του (συγκεκριμένα, από τη δεκαετία του 1910-1920 και μετά) *δεν* χαρακτηρίζεται από μειούμενη παραγωγικότητα του κεφαλαίου, και, άρα, από μακροχρονίως

[9] Προς διευκόλυνση της/του μη-εξοικειωμένου με τα ζητήματα αναγνώστη, στο Παράρτημα του παρόντος κατασκευάζουμε αριθμητικά παραδείγματα, τα οποία ενέχουν όλες τις προαναφερθείσες εναλλακτικές δυνατότητες. Για τη γενική διερεύνηση, βλέπε Μαριόλης (2010, Δοκίμιο 10, 2014), Mariolis (2014), και τις εκεί παρατιθέμενες βιβλιογραφικές αναφορές.

μειούμενο ποσοστό κέρδους, μπορούν να επισκιάσουν το εν λόγω, επιστημονικά πρωτοπόρο, επίτευγμα του Marx. Απλώς, με τη συνδυασμένη εμφάνιση του «Δευτέρου Κύματος της Βιομηχανικής Επανάστασης» (δεκαετία του 1870) και, εν συνεχεία, του μονοπωλιακού ανταγωνισμού, οι πρώην δρώσες (οι πρώην αντιδρώσες) αιτίες μετατράπηκαν, βαθμιαίως, σε αντιδρώσες (σε δρώσες) αιτίες της *ανοδικής* κίνησης του ποσοστού κέρδους, ενώ στις αντιδρώσες αιτίες αυτής της νέας κατεύθυνσης κίνησης περιλαμβάνονται, πλέον, και εκείνοι οι παράγοντες, οι οποίοι δύνανται να οδηγήσουν στη *μείωση του ποσοστού υπεραξίας*.

Έτσι, για παράδειγμα, η – πρώτη μετά τον 2ο Παγκόσμιο Πόλεμο – άξια λόγου πτωτική κίνηση του ποσοστού κέρδους, η οποία χαρακτήρισε τις κεφαλαιοκρατικά προηγμένες εθνικές οικονομίες από τα μέσα της δεκαετίας του 1960 έως και τα μέσα της δεκαετίας του 1980, οφειλόταν στην πτώση του ποσοστού υπεραξίας (και, ειδικότερα, στους σχετικά υψηλούς ποσοστιαίους ρυθμούς αύξησης του πραγματικού ωρομισθίου, οι οποίοι υπερέβαιναν, δηλαδή, εκείνους της παραγωγικότητας της εργασίας). Τέλος, η εν συνεχεία άνοδος του ποσοστού κέρδους, των ιδίων οικονομιών, οφειλόταν στην άνοδο τόσο του ποσοστού υπεραξίας όσο και της παραγωγικότητας του κεφαλαίου.

Όλα αυτά δεν επισκιάζουν, λοιπόν, παρά τους λογοκόπους της «επιστήμης», της «φιλοσοφίας», και της «πολιτικής». Και δεν συνεπάγονται, βεβαίως, ότι η παραγωγικότητα του κεφαλαίου θα αυξάνεται για πάντα, εις τους αιώνας των αιώνων, αλλά ότι, όποια και να είναι, σε κάθε ιστορικά διακριτή περίοδο, η κατεύθυνση της κίνησης του ποσοστού κέρδους, γνωρίζουμε «πού και πώς πρέπει να κοιτάξουμε», ούτως ώστε να την ερμηνεύσουμε. Όσοι δε αβίαστα ομιλούν, σήμερα, για την «4η (ή Νιοστή) Βιομηχανική Επανάσταση», την «τεχνολογική ανεργία», τη «ρομποτική» κ.λπ., έχουν πολλά να διδαχθούν από τη μαρξική διερεύνηση και, ιδίως, οφείλουν – πρώτα – να μελετήσουν εμπειρικά τις διαχρονικές εξελίξεις των παραγωγικοτήτων εργασίας και κεφαλαίου, του λόγου κερδών-μισθών, και του ποσοστού κέρδους.

4.5. Το χρυσό κλειδί

Στο κοινωνικο-οικονομολογικό επίπεδο, επιστημονικό θεμέλιο του λεγομένου Μαρξισμού, δηλαδή του Διαλεκτικού-Ιστορικού Υλισμού, δεν είναι, και δεν θα ήταν δυνατόν να είναι, ο ένας ή άλλος μερικός νόμος, ο οποίος απορρέει, δηλαδή, από παράγοντες ιστορικά *μεταβατικής* επενέργειας. Ούτε, βεβαίως, και ένα σύνολο τέτοιων νόμων.

Ο «Νόμος της Πτωτικής Κίνησης του Ποσοστού Κέρδους» του Marx απέρρεε από τεχνολογικούς παράγοντες ή, για την ακρίβεια, περιορισμούς: Η αύξηση της παραγωγικότητας της εργασίας προϋπέθετε τη μείωση της παραγωγικότητας του κεφαλαίου. Έτσι, αυτός ο νόμος θα έπαυε να ισχύει όταν η αύξηση της παραγωγικότητας της εργασίας θα μπορούσε να συμβαδίσει με τη μη-μείωση της παραγωγικότητας του κεφαλαίου. Και όντως έπαψε να ισχύει, όταν μεταβλήθηκε αντιστοίχως η τεχνολογική βάση του κεφαλαιοκρατικού τρόπου παραγωγής. Είναι, λοιπόν, παραπάνω από συγκλονιστικό ότι, για κάποιους, οι οποίοι επικαλούνται σχέσεις καθοριζόμενες από τεχνολογικούς παράγοντες, οι έννοιες «Δεύτερο Κύμα της Βιομηχανικής Επανάστασης» και «Μονοπωλιακός Ανταγωνισμός» δεν λένε το ελάχιστο.

Εάν ο Διαλεκτικός-Ιστορικός Υλισμός έχει κάτι να προσφέρει, στο κοινωνικο-οικονομολογικό επίπεδο, τότε αυτό είναι, σύμφωνα με τους εισηγητές του, ό,τι αποκαλείται: «Νόμος της αναγκαίας αντιστοιχίας των παραγωγικών σχέσεων προς το χαρακτήρα και τη βαθμίδα ανάπτυξης των παραγωγικών δυνάμεων». Η δε εφαρμογή αυτού του νόμου ειδικά στον κεφαλαιοκρατικό τρόπο παραγωγής αποκαλύπτει, πάλι σύμφωνα με τους προαναφερθέντες εισηγητές, ότι ο αυτός ο τρόπος κοινωνικής παραγωγής διέπεται από μία θεμελιώδη πολική αντίθεση, ήτοι εκείνη ανάμεσα στον κοινωνικό χαρακτήρα της παραγωγής (ο οποίος απορρέει από το χαρακτήρα και τη βαθμίδα ανάπτυξης των παραγωγικών δυνάμεων) και στην ατομική κερδοσκοπική ιδιοποίηση των προϊόντων της παραγωγής (η οποία απορρέει από τις υφιστάμενες παραγωγικές σχέσεις).

Και από εδώ *όλα* τα υπόλοιπα. Με πρώτα, από λογική άποψη, το «φετιχιστικό χαρακτήρα του *κεφαλαίου*» (και όχι, απλώς, του εμπορεύματος, στον οποίο έχουν – κατά κανόνα – σταθμεύσει οι ύστεροι «μαρξιστές νεο-χεγκελιανοί», από τον Herbert Marcuse και τον Guy Debord, και μετά), τη «ψευδή συνείδηση» και «πραγμοποίηση», τους διαταξικούς και ενδοταξικούς ανταγωνισμούς, και τις ενδογενείς οικονομικές διακυμάνσεις και κρίσεις. Αποτελεί, άραγε, τυχαίο γεγονός ότι, αφενός, ο Engels ξεκίνησε, στον επικήδειο για τον Marx, από τους νόμους «εξέλιξης της ανθρώπινης ιστορίας» και, εν συνεχεία, «κίνησης του σύγχρονου κεφαλαιοκρατικού τρόπου παραγωγής», και, αφετέρου, ότι, πολλοί από εκείνους, οι οποίοι εστιάζουν στον ένα ή άλλο – νυν ή πρώην – μερικό νόμο, αντιπαρέρχονται την εν λόγω πολική αντίθεση και τις συνεπαγωγές της;

Κατά την άποψη του Lenin, είναι τέτοιο το δυναμικό του Διαλεκτικού-Ιστορικού Υλισμού, ώστε πάντοτε υπάρχουν εχθροί του, οι οποίοι εμφανίζονται ως φίλοι του. Δεν γνωρίζω εάν είχε επηρεαστεί από το Ευαγγέλιο:

> Προσέχετε δε από των ψευδοπροφητών, οίτινες έρχονται προς υμάς εν ενδύμασι προβάτων, έσωθεν δε είσιν λύκοι άρπαγες. Από των καρπών αυτών επιγνώσεσθε αυτούς. […] Ου δύναται δένδρον αγαθόν καρπούς πονηρούς ποιείν, ουδέ δένδρον σαπρόν καρπούς καλούς ποιείν. Παν δένδρον μη ποιούν καρπόν καλόν εκκόπτεται και εις πυρ βάλλεται.

5. Συμπερασματικές Παρατηρήσεις

Εν αντιθέσει με τις φήμες, οι οποίες συστηματικά διασπείρονται, ιδίως, μάλιστα, στην πατρίδα μας, από διαφόρους «μαρξιστές, φιλο- ή κριτικο-μαρξιστές», ο Διαφορικός Λογισμός-Οριακή Ανάλυση δεν έχει κάποια ιδιαίτερη σχέση με τη Νεοκλασική Οικονομική Θεωρία, ενώ ο Marx μελέτησε εντατικά τη μαθηματική επιστήμη, και την εφάρμοσε εκτενώς στα οικονομολογικά γραπτά του. Το γεγονός ότι, όταν φυλλομετρούμε αυτά τα γραπτά, δεν τυχαίνει να πέφτει το μάτι μας σε «εξωτικές» μαθηματικές παραστάσεις, δεν προσφέρει την περί του αντιθέτου απόδειξη.

Αναφερθήκαμε, παραδειγματικά, στη συνάρτηση του ποσοστού κέρδους, αλλά δύναται να προστεθεί ότι, μεταξύ άλλων, οι έννοιες «σταθερό και μεταβλητό κεφάλαιο», οι οποίες διαδραματίζουν νευραλγικό ρόλο στη θεωρία του Marx περί παραγωγής θετικών κερδών, κατάγονται από το διαφορικό λογισμό. Συγκεκριμένα, κατάγονται από την ανάλυση περί «*fluxions*» («ροών»), την οποία συγκρότησε, περί το 1665, ο Newton, προκειμένου να προσδιορίσει το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής χρονικά μεταβαλλομένων ποσοτήτων ή, αλλιώς, την παράγωγό τους ως προς το χρόνο.

Εν αντιθέσει, επίσης, με τον Hegel, ο Marx θεωρούσε το μη-μυστικιστικό διαφορικό λογισμό ως – καταρχήν και καταρχάς – κατάλληλο για τη μελέτη των στον *πραγματικό* κόσμο συντελουμένων διαλεκτικών μεταβολών, και υποστήριζε ότι «μία επιστήμη έχει πραγματικά αναπτυχθεί μόνο όταν χρησιμοποιεί με επιτυχία τα Μαθηματικά». Ωστόσο, με το οικονομολογικό έργο του, καίτοι σημαντικά ημιτελές, ξεπέρασε ακόμα και αυτά τα όρια. Διότι, όπως γνωρίζουμε πολύ καλά σήμερα, δηλαδή μετά τους Piero Sraffa, Nobuo Okishio, Michio Morishima και Richard Murphey Goodwin, ο Marx έθεσε και προβλήματα των οποίων η επίλυση ήταν αδύνατη βάσει της μαθηματικής επιστήμης της εποχής του. Δύο χαρακτηριστικά τέτοια προβλήματα ήταν: (α) η μεταστοιχείωση των εργασιακών αξιών των εμπορευμάτων στις τιμές τους, και (β) η «αποσύνθεση» των εμπειρικά παρατηρουμένων οικονομικών διακυμάνσεων σε επιμέρους διακυμάνσεις, ήτοι, σύμφωνα με την ύστερη ορολογία, σε διακυμάνσεις «γενικής τάσης», «κυκλικές», και «άρρυθμες». Αλλά μήπως δεν έθεσε και το ζήτημα των αυτο-αναιρουμένων συστημάτων (όπως των «τρόπων κοινωνικής παραγωγής»), το οποίο δεν είναι σε θέση να μοντελογραφήσει ποσοτικά ούτε η επιστήμη της εποχής μας;

Δεδομένου ότι απαιτήθηκαν από δύο έως τρεις αιώνες για τη μάλλον ευσταθή θεμελίωση – μόνο – του Διαφορικού Λογισμού, γιατί είναι ορισμένοι τόσο ανυπόμονοι και άλλοι τόσο αφοριστικοί απέναντι στο Διαλεκτικό-Ιστορικό Υλισμό; Και, τελικά, τι έβαλαν στη θέση του;

Παράρτημα: Αριθμητικά Παραδείγματα

Έστω ότι το ποσοστό υπεραξίας αυξάνεται συνεχώς, χωρίς πεπερασμένο όριο, κατά μήκος του χρόνου, *t*, και σύμφωνα με την εκθετική συνάρτηση:

$$m(t) = 0.1e^{0.01t},\ e \cong 2.718$$

Επομένως, ο ποσοστιαίος ρυθμός αύξησής του, $m'(t)/m(t)$, είναι σταθερός και ίσος με 1%.

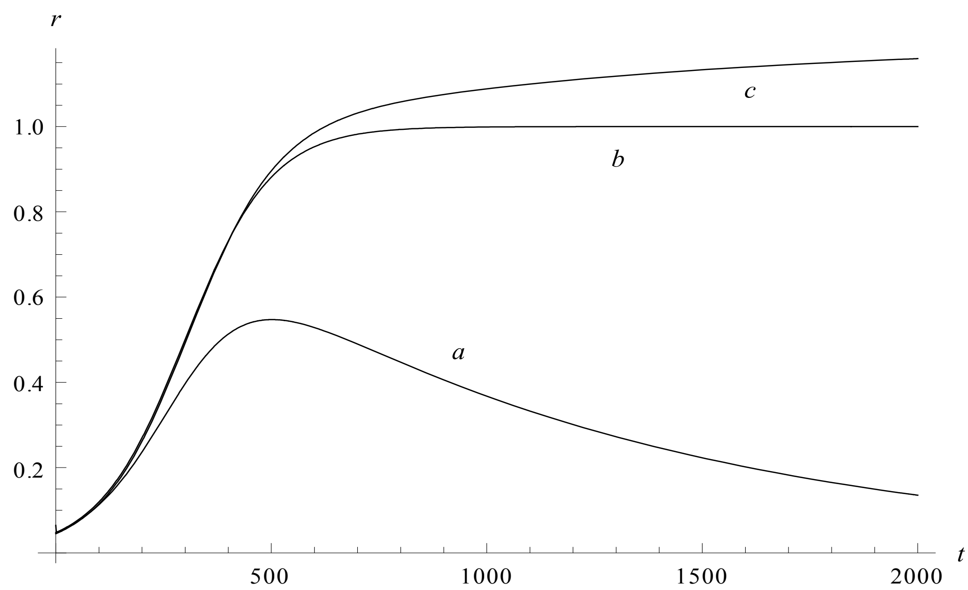
Για την παραγωγικότητα του κεφαλαίου υποθέτουμε τρεις, εναλλακτικές μεταξύ τους, περιπτώσεις:

(a). $\pi_{\mathrm{C}}(t) = e^{-0.001t}$ (μειώνεται συνεχώς, τείνοντας στο 0).

(b). $\pi_{\mathrm{C}}(t) = 1 + 0.1^{t}$ (μειώνεται συνεχώς, τείνοντας σε *θετική* τιμή, ήτοι στο 1).

(c). $\pi_{\mathrm{C}}(t) = 1.2 - 0.3(0.999)^{t}$ (αυξάνεται συνεχώς, σύμφωνα με μία λογαριθμικά μετασχηματισμένη συνάρτηση Gompertz, και τείνει στο 1.2).

Όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί, και στις τρεις αυτές περιπτώσεις η οργανική σύνθεση του κεφαλαίου αυξάνεται συνεχώς, χωρίς πεπερασμένο όριο. Ωστόσο, για το ποσοστό κέρδους ισχύουν τα ακόλουθα (βλέπε Σχήμα Π.1): Στην περίπτωση (a), αρχικά αυξάνεται συνεχώς, δηλαδή έως τη χρονική στιγμή $t \cong 501.440$, και, εν συνεχεία, μειώνεται συνεχώς, τείνοντας στο 0. Στην περίπτωση (b), αρχικά μειώνεται συνεχώς, δηλαδή έως τη χρονική στιγμή $t \cong 2.098$, και, εν συνεχεία, αυξάνεται συνεχώς, τείνοντας στο 1, δηλαδή στο όριο της παραγωγικότητας του κεφαλαίου (αυτή η αλλαγή μονοτονίας δεν είναι ορατή στο Σχήμα Π.1, λόγω της κλίμακας κατασκευής του, αλλά εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί με υπολογισμό). Τέλος, στην περίπτωση (c), αυξάνεται συνεχώς, τείνοντας στο 1.2, δηλαδή στο όριο της παραγωγικότητας του κεφαλαίου.



Σχήμα Π.1. *Δυνατές εξελίξεις του ποσοστού κέρδους, όταν η οργανική σύνθεση του κεφαλαίου αυξάνεται συνεχώς, χωρίς πεπερασμένο όριο*

Εάν, τώρα, θελήσουμε να περιλάβουμε μία εικόνιση οικονομικών διακυμάνσεων, μπορούμε να υποθέσουμε, χάρη απλούστευσης και συντομίας, ένα μονοτομεακό οικονομικό σύστημα, και ότι το πραγματικό ωρομίσθιο εξελίσσεται σύμφωνα με, για παράδειγμα, την εξίσωση:

$$b(t) = \beta_1(t)\beta_2(t)$$

όπου το $\beta_1(t) \equiv e^{0.01t}$ παριστά τη «συνιστώσα γενικής τάσης» του ωρομισθίου, η οποία αντανακλά δομικούς παράγοντες, ενώ το $\beta_2(t) \equiv 1 - 0.1\cos(0.2t)$ παριστά την «κυκλική συνιστώσα» του ωρομισθίου, η οποία αντανακλά παράγοντες οικονομικής συγκυρίας.

Επίσης, υποθέτουμε ότι η παραγωγικότητα της εργασίας αυξάνεται συνεχώς, σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\pi_{\mathrm{L}}(t) = 1.1(\beta_1(t))^2$$

Επομένως, για το ποσοστό υπεραξίας προκύπτει:

$$m(t) \equiv (\pi_L(t) - b(t)) / b(t) = (1.1\beta_1(t) / \beta_2(t)) - 1$$

εξίσωση από την οποία έπεται ότι αυτό ακολουθεί μία «γραμμή ανοδικής τάσης», με μειώσεις, οι οποίες είναι λιγότερο έντονες από ό,τι οι αυξήσεις του, και τείνει στο συν άπειρο (βλέπε Σχήμα Π.2, όπου η διακεκομμένη γραμμή δηλώνει τη «γραμμή τάσης», με εξίσωση: $1.1\beta_1(t) - 1$).

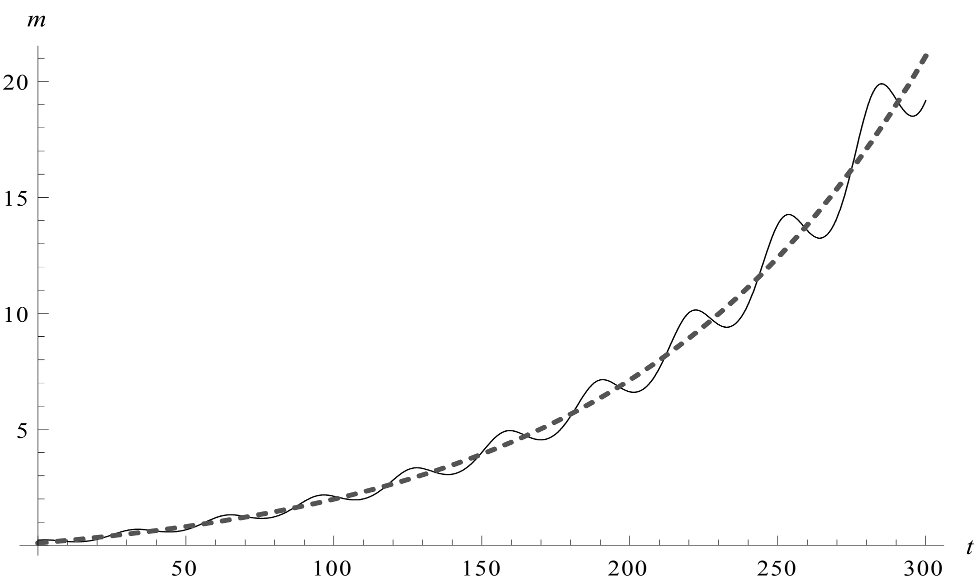
Τέλος, για την εξέλιξη της παραγωγικότητας του κεφαλαίου, ας υποθέσουμε ότι αυτή συντίθεται, προσθετικά, από μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, υπερβολικής μορφής, $1/(1+t^{1.2})$, και μία συνάρτηση Gompertz, ήτοι

$$\pi_{\mathrm{C}}(t) = [1/(1+t^{1.2})] + 1.2e^{\pi(t)}$$

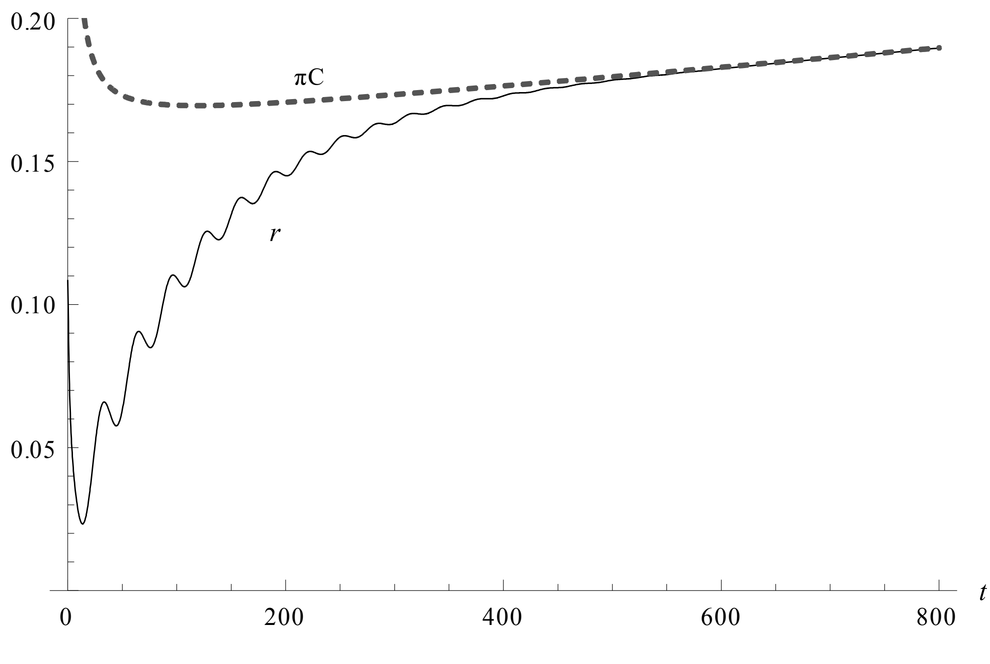
όπου $\pi(t) \equiv -2e^{-0.0001t}$.

Συνεπώς, όπως δύναται να διαπιστωθεί, η παραγωγικότητα του κεφαλαίου, αρχικά μειώνεται συνεχώς, δηλαδή έως τη χρονική στιγμή $t \cong 118.188$, και εν συνεχεία αυξάνεται συνεχώς, τείνοντας στο 1.2.

Έτσι, το ποσοστό κέρδους, καίτοι αρχικά μειώνεται συνεχώς, δηλαδή έως τη χρονική στιγμή $t \cong 13.518$, εν συνεχεία εμφανίζει διακυμάνσεις ανοδικής τάσης, ενώ «έλκεται», όλο και περισσότερο, προς την τροχιά της παραγωγικότητας του κεφαλαίου (βλέπε Σχήμα Π.3).



Σχήμα Π.2. *Περίπτωση ανοδικής κίνησης του ποσοστού υπεραξίας μέσω διακυμάνσεων*



Π.3. *Οι αντίστοιχες εξελίξεις της παραγωγικότητας του κεφαλαίου και του ποσοστού κέρδους*

Αναφορές

Ελληνόγλωσσες

Brand, L. ([1955] 1984) *Μαθηματική Ανάλυση*, Αθήνα, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Ένγκελς, Φ. ([1878] 2006) *Αντι-Ντίρινγκ: Η ανατροπή της επιστήμης από τον κύριο Ευγένιο Ντίρινγκ*, Αθήνα, Σύγχρονη Εποχή.

Ένγκελς, Φ. ([1873-1886] χ.χ.) *Διαλεκτική της Φύσης*, Αθήνα, Αναγνωστίδης.

Ινστιτούτο Οικονομίας της Ακαδημίας Επιστημών της ΕΣΣΔ ([1954] 1961) Πολιτική Οικονομία, Αθήνα, Σύγχρονη Επιστήμη.

Καστοριάδης, Κ. ([1975] 1981) *Η Φαντασιακή Θέσμιση της Κοινωνίας*, Αθήνα, Εκδόσεις Ράππα.

Λένιν, Β. Ι. (1895-1916) *Φιλοσοφικά Τετράδια*, στο: Β. Ι. Λένιν (1986) *Άπαντα*, Τόμος 29ος, Αθήνα, Σύγχρονη Εποχή.

Λένιν, Β. Ι. (1915-1916) *Τετράδια για τον Ιμπεριαλισμό*, στο: Β. Ι. Λένιν (1986) *Άπαντα*, Τόμος 28ος, Αθήνα, Σύγχρονη Εποχή.

Λένιν, Β. Ι. (1917) *Ο Ιμπεριαλισμός Ανώτατο Στάδιο του Καπιταλισμού. Εκλαϊκευτική Μελέτη*, στο: Β. Ι. Λένιν (1986) *Άπαντα*, Τόμος 27ος, Αθήνα, Σύγχρονη Εποχή.

Μαριόλης, Θ. (2010) *Δοκίμια στη Λογική Ιστορία της Πολιτικής Οικονομίας*, Αθήνα, Matura.

Μαριόλης, Θ. (2014) Η θεωρία οικονομικών κρίσεων του Karl Marx, MPRA Paper, No. 56831, June 2014. https://mpra.ub.uni-muenchen.de/56831/ (ανακτήθηκε στις 18 Δεκεμβρίου 2018).

Μαρξ, Κ. (1987) *Μαθηματικά Χειρόγραφα*, Αθήνα, Γλάρος.

Ντεμπόρ, Γ. ([1967] 1986) *Η Κοινωνία του Θεάματος*, Αθήνα, Ελεύθερος Τύπος.

Penrose, R. (2010) *Αναζητώντας την Πραγματικότητα. Ένας Πλήρης Οδηγός των Νόμων του Σύμπαντος*, Αθήνα, Γκοβόστης.

Σαραντόπουλος, Σ. (1951) *Εξέλιξις της Γεωμετρίας και της Αναλύσεως, και τα Θεμέλια τούτων. Εναρκτήριος λόγος, εκφωνηθείς τη 11η Φεβρουαρίου 1949, εν τη Μεγάλη Αιθούση των τελετών του Πανεπιστημίου Αθηνών*, Αθήναι.

Σεγκάλ, Λ. ([1936] χ.χ.) *Αρχές Πολιτικής Οικονομίας*, Αθήνα, Αναγνωστίδης.

Ξενόγλωσσες

Berkeley, G. (1734) *The Analyst. A DISCOURSE Addressed to an Infidel MATHEMATICIAN. WHEREIN It is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith*, London, Printed for J. Tonson in the *Strand*. https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst/Analyst.html (ανακτήθηκε στις 18 Δεκεμβρίου 2018).

Crowell, B. (2015) *Brief Calculus*. http://www.lightandmatter.com/calc/ (ανακτήθηκε στις 18 Δεκεμβρίου 2018).

Dauben, J. W. (2003) Mathematics, ideology, and the politics of infinitesimals: Mathematical logic and nonstandard analysis in modern China, *History and Philosophy of Logic*, 24 (4), pp. 327-363.

Eugeni, S. (2016) Global imbalances in the XIX, XX and the XXI centuries, *Economics Letters*, 145, pp. 69-72.

Gehrke, C. and Kurz, H. D. (2018) Sraffa's constructive and interpretive work, and Marx, *Review of Political Economy*, 30 (3), pp. 428-442.

Gerdes, P. (2014) *The Philosophic-Mathematical Manuscripts of Karl Marx on Differential Calculus: An Introduction*. www.lulu.com (ανακτήθηκε στις 18 Δεκεμβρίου 2018).

Glivenko, V. (1935) Der Differentialbegriff bei Marx und Hadamard, *Unter dem Banner des Marxismus*, 9, pp. 102-110.

Keisler J. H. (2000) *Elementary Calculus. An Infinitesimal Approach*, Second Edition. http://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html (ανακτήθηκε στις 18 Δεκεμβρίου 2018).

Kurz, H. D. (2018) Will the MEGA2 edition be a watershed in interpreting Marx?, *The European Journal of the History of Economic Thought*. https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/09672567.2018.1523937 (ανακτήθηκε στις 18 Δεκεμβρίου 2018).
Landen, J. (1764) *The Residual Analysis; a New Branch of the Algebraic Art, of Very Extensive Use, Both in Pure Mathematics, and Natural Philosophy*, Book I, London: for the author. https://archive.org/details/bub_gb_Bmd4AgjCMQ8C (ανακτήθηκε στις 18 Δεκεμβρίου 2018).
Leibniz, G. W. ([1714] 2004) *Discours de métaphysique suivi de Monadologie et autres textes*, Édition établie, présentée et annotée par Michel Fichant, Paris, Éditions Gallimard.
Mariolis, T. (2014) Falling rate of profit and mass of profits: A note, *Review of Political Economy*, 26 (4), pp. 549-556.
Marx, K. (1983) *Mathematical Manuscripts*, London, New Park Publications.
Marx, K. (1994) *Mathematical Manuscripts*, Translated and edited by Pradip Baksi, Calcutta, Viswakos Parisad.
Okishio, N. (1961) Technical changes and the rate of profit, *Kobe University Economic Review*, 7, pp. 85-99.
Okishio, N. (1972) A formal proof of Marx's two theorems, *Kobe University Economic Review*, 18, pp. 1-6.
Robinson, A. (1966) *Non-Standard Analysis*, Amsterdam, North-Holland.
Stewart, I. (1996) *From Here to Infinity*, Oxford, Oxford University Press.
Strichartz, R. S. (2000) *The Way of Analysis*, Sudbury, MA, Jones and Bartlett Publishers.
Struik, D. J. (1948) Marx and Mathematics, *Science and Society*, 12 (1), pp. 181-196.
Struik, D. J. (Ed.) (1986) *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press.
Van Heijenoort, J. (1985) Friedrich Engels and Mathematics, in: J. Van Heijenoort, *Selected Essays*, Napoli, Bibliopolis.